[19] Nastasi - Scimone. «Pietro Mengoli and the Six-Square Problem». *Historia Mathematica* (1994), 10–27.

[20] A. Natucci. «Mengoli». A: C.C. Gillispie [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's (1970-1991), 303–304.

[21] H. Oldenburg. *The Correspondence of Henry Oldenburg*. 13 vol. Madison: University of Wisconsin Press (1986). [Editat per Rupert Hall & Marie Boss Hall]

[22] L. Pepe. «Il Calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVII». *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 1 (1981), núm. 2, 43–101.

[23] G. Tabarroni. «Geminiano Montanari». A: C.C Gillispie [ed.]. *Dictionary of Scientific Biography*. Nova York: Scribner's, 9 (1971–1991), 485–487.

[24] G. Vacca. «Sulle scoperte di Pietro Mengoli». *Atti dell'Accademia Nacionale del Lincei-Rendiconti* XXIV (1915), 5.

# Problemes

Juanjo Rué
Universitat Politècnica de Catalunya

Nova remesa de d'incògnites matemàtiques per als àvids entusiastes de la resolució de problemes. En aquesta ocasió, tenim quatre problemes de diferent temàtica, i proposats per amics i col·laboradors de totes les geografies: per començar, Miquel Amengual, des de Cala Figuera, ens proposa un problema geomètric molt maco en honor al meu antecessor en aquesta secció, Carles Romero. Xavier Ros-Otón, des de Zuric, ens fa arribar un problema d'anàlisi molt interessant. José Luis Díaz-Barrero, des de Barcelona ens farà passar una bona estona treballant amb un dels seus problemes de desigualtats tan complicats...i alhora tan entretinguts! I finalment Joaquim Nadal, des de Llagostera, ens suggereix un problema de recurrències dobles per treballar-hi una estona. A tots ells els agraeixo la disponibilitat i el bon gust matemàtic en les propostes que ens han fet!
Pel que fa a les solucions dels problemes proposats al número passat: hem rebut solucions de Miquel Amengual, d'Esteve Casas, des de Sant Celoni i de Joaquim Nadal. Moltes gràcies també per les propostes de solucions, totes elles plenes d'enginy i bones idees. Quant a l'últim problema, proposat per l'editorial, malauradament no hem rebut cap solució correcta. Com veureu, es requeria d'una combinació d'arguments combinatoris, junt amb una idea analítica, a fi d'arribar a una contradicció.
Amb vista a les solucions i noves propostes de problemes: podeu fer-nos arribar la informació a l'adreça de correu electrònic següent:

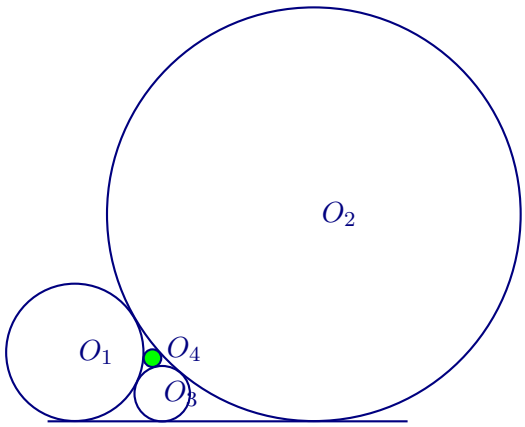
`juan.jose.rue@upc.edu`

Les propostes de solucions (i també nous problemes proposats) seran especialment benvinguts si estan escrits en TEX o LaTEX i amb les figures corresponents. Això facilitarà molt l'edició i la feina de tots. Moltes gràcies...i a resoldre problemes s'ha dit!

## Problemes proposats

**A145.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

*Dedicat a Carles Romero i Chesa.* Quatre circumferències $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$, $O_3\,(r_3)$ i $O_4\,(r_4)$ són mútuament tangents exteriorment i la recta $l$ és una tangent comuna a $O_1\,(r_1)$, $O_2\,(r_2)$ i $O_3\,(r_3)$.



1) Expressau el valor de $r_4$ com una funció de $r_1$ i de $r_2$.

2) Si $d$ és la distància de $O_4$ a $l$, provau que $d = 7r_4$.

**A146.** (Proposat per Xavier Ros-Otón, Universitat de Zuric, Zuric.)
Sigui $u(x)$ una funció contínua.

1) Demostreu que si $\frac{1}{h}(u(x+h) - u(x))$ és constant per a tot $h$, aleshores $u(x) = ax + b$.

2) Demostreu que si $\frac{1}{h^2}(u(x+h) + u(x-h) - 2u(x))$ és constant per a tot $h$, aleshores $u(x) = ax^2 + bx + c$.

**A147.** (Proposat per José-Luis Díaz Barrero, BarcelonaTech UPC, Barcelona.)
Siguin $a, b, c$ tres nombres reals positius tals que $a + b + c = 1$. Demostreu que la desigualtat

$$\frac{a^3}{x^2+2y^2} + \frac{b^3}{y^2+2z^2} + \frac{c^3}{z^2+2x^2} \geq \geq \frac{1}{9\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

és certa per a tots els nombres reals positius $x, y, z$.

**A148.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal. Llagostera.)
Sigui $a_{0,0} = 1$, $a_{n,k} = 0$ si $k < 0$ o $k < n$ i $a_{n,k} = \frac{1}{2}\left(a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}\right)$. Calculeu $\lim_{n\to\infty} n a_{2n,n}^2$.

## Solucions

**A141.** (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera.)

En un triangle $\triangle ABC$ traceu (mitjançant regla i compàs) una recta paral·lela $l$ a la base $BC$ que talli els costats $AB$ i $AC$ en els punts $D$ i $E$, respectivament, tal que $BD + CE = BC$.

**Solució:** (Solució de Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

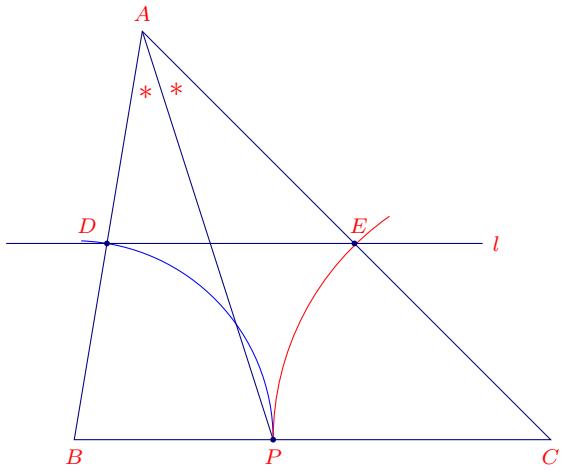
Analitzem primer la construcció: siguin $D$ i $E$ punts sobre els costats $AB$ i $AC$, respectivament, d'un triangle $\triangle ABC$, tals que el segment $DE$ és paral·lel al segment $BC$ i $BD + CE = BC$. En particular, es complirà que $BD < BC$. Així doncs, sigui $P$ el punt de l'interior del costat $BC$ tal que $BP = BD$ i, per tant, $PC = BC - BP = BC - BD = CE$.
D'altra banda, del teorema de Thales se'n dedueix que

$$\frac{BD}{CE} = \frac{AB}{AC}.$$

Tenint en compte que $BP = BD$ i $PC = CE$, la igualtat anterior s'escriu

$$\frac{BP}{PC} = \frac{AB}{AC},$$

d'on deduïm, pel recíproc del teorema de la bisectriu interior, que $P$ és el peu de la bisectriu de $\widehat{CAB}$.




La construcció geomètrica és aleshores la següent: si tracem la bisectriu interior de l'angle $\widehat{CAB}$ del triangle $\triangle ABC$ i aquesta talla el costat $BC$ en el punt $P$, llavors la circumferència de centre $B$ i radi $BP$ talla el costat $AB$ en el punt $D$ i la circumferència de centre $C$ i radi $CP$ talla el costat $AC$ en el punt $E$.

La recta que uneix aquests punts $D$ i $E$ és la recta $l$ volguda.

En particular, el problema té una sola solució.

**A142.** (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, UPC BarcelonaTech, Barcelona.)

Siguin $a, b$ dos nombre reals positius. Demostreu que:

$$\left(\frac{1}{1+\sqrt{a}}\right)\left(\frac{1}{1+\sqrt{b}}\right) + \sqrt{\frac{a(1+\sqrt{b})^2+b(1+\sqrt{a})^2}{ab+(1+\sqrt{a})^2(1+\sqrt{b})^2}} < 1.$$

**Solució:** (Solució d'Esteve Casas, Sant Celoni.) Expressem primer la desigualtat d'una altra manera, dividint el numerador i el denominador de la part interior de l'arrel per $(1+\sqrt{a})^2(1+\sqrt{b})^2$ i reescrivint les fraccions de fora:

$$\left(1-\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\right) + \sqrt{\frac{\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\right)^2}{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\right)^2}} < 1.$$

Fem ara el canvi de variable $c \to \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}}$ i $d \to \frac{\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}$, amb $0 < c < 1$, $0 < d < 1$. La desigualtat a calcular es converteix en:

$$(1-c)(1-d) + \sqrt{\frac{c^2+d^2}{1+c^2d^2}} < 1.$$

Desenvolupem aquesta expressió:

$$\sqrt{\frac{c^2+d^2}{1+c^2d^2}} < c+d-cd$$
$$\longrightarrow \frac{c^2+d^2}{1+c^2d^2} < (c+d-cd)^2.$$

Passant ara el denominador de l'esquerra a l'altra banda multiplicant i agrupant l'expressió com si fos un polinomi en la variable $c$ (igual es podria haver fet per la $d$, l'expressió és simètrica), obtenim que la desigualtat anterior s'escriu:

$$0 < (d^4+d^2-2d^3)c^4 + (2d^3-2d^4)c^3 + (d^4+d^2-2d)c^2 + (2d-2d^2)c.$$

Finalment, simplificant aquesta expressió per $cd(1-d)$, obtenim la desigualtat:

$$0 < (d-d^2)c^3 + 2d^2c^2 - (d^2+d+2)c + 2.$$

Tenim així un polinomi de tercer grau $P(c) = (d-d^2)c^3+2d^2c^2-(d^2+d+2)c+2$. Veurem ara que té derivada negativa en l'interval $[0,1]$ i, per tant, que el mínim del polinomi $P(c)$ s'assoleix en el valor $P(1) = 0$. Dit d'una altra manera: $P(c)$ és estrictament positiu en l'interval $[0,1)$. En efecte:

1. La derivada primera és $P'(c) = 3(d-d^2)c^2 + 4d^2c - (d^2+d+2)$ i, per tant, $P'(0) = -(d^2+d+2) < 0$ i també $P'(1) = 2d-2 < 0$
2. La derivada segona $P''(c) = 6(d-d^2)c+4d^2$, $P''(0) = 4d^2 > 0$ i $P''(1) = 6d-2d^2 > 0$
3. Per tant, la derivada primera és estrictament creixent passant dels valors negatius $-(d^2+d+2)$ a $2d-2$, és a dir, sempre negativa.

**A143.** (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)

Sigui $\triangle ABC$ un triangle tal que $\widehat{BAC} > 90°$. Siguin $D$, $E$ punts sobre el segment $BC$ tals que $AD \perp AC$ i $AE \perp AB$. Sigui $H$ el peu de la perpendicular des de $A$ a $BC$. Suposant que

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{AH},$$

determineu l'angle $\widehat{BAC}$.

**Solució:** (Solució de Joaquim Nadal Vidal. Llagostera.)

Denotem per $A$ l'angle $\widehat{BAC}$, i similarment per $B$ i $C$. Tots els angles que apareixeran els escriurem en graus. Així mateix, denotem per $a$, $b$ i $c$ les longituds dels costats $BC$, $AC$ i $AB$, respectivament.

Per començar, observeu que els angles del triangle $\triangle ABD$ són $A-90$, $B$ i $C+90$. Aleshores, pel teorema del sinus tenim que:

$$\frac{BD}{\sin(A-90)} = \frac{c}{\sin(C+90)},$$

d'on deduïm que:

$$BD = \frac{c\sin(A-90)}{\sin(C+90)} = \frac{c\sin(A-90)}{\cos(C)} = \frac{b\sin(C)\sin(A-90)}{\sin(B)\cos(C)}.$$

D'altra banda, els angles del triangle $\triangle ACE$ són $C$, $A-90$ i $B+90$, i novament pel teorema del sinus tenim que:

$$\frac{CE}{\sin(A-90)} = \frac{b}{\sin(B+90)},$$

d'on deduïm que $CE = b\frac{\sin(A-90)}{\cos(B)}$. Finalment, observem que $AH = b\sin(C)$. Ara combinem aquestes tres expressions amb la condició de l'enunciat, és a dir:

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CE} = \frac{1}{AH} \longrightarrow$$
$$\frac{\sin(B)\cos(C)}{b\sin(C)\sin(A-90)} + \frac{\cos(B)}{b\sin(A-90)} = \frac{1}{b\sin(C)}.$$

Treballant aquesta expressió se'n dedueix que:

$$\sin(B)\cos(C) + \cos(B)\sin(C) = \sin(A-90),$$

i, per tant, s'ha de complir que $\sin(B+C) = \sin(A-90)$. Aquesta equació ens diu, doncs, que o bé $B+C = A-90$ o bé que $B+C+A-90 = 180$. Combinant ara cadascun dels casos amb la condició del triangle ($A+B+C = 180$) constatem que el segon cas no és possible. En el primer cas, però, deduïm que $A = 135$, i aquesta és la solució del problema.

**A144.** (Proposat per l'editorial.)

Sigui $A$ un conjunt de nombres enters positius. Definim la funció $R_A(n)$ com el nombre de solucions de l'equació $n = x+y$ amb $x$, $y \in A$ i $x \leq y$. Demostreu que si $A$ és infinit aleshores, per $n$ suficientment gran, $R_A(n)$ no pot ser una funció constant.

**Solució:** (Solució de l'editorial.)

Donat un conjunt $A$ de nombres enters positius, considerem la seva funció generadora associada $f_A(z) = \sum_{a\in A} z^a$. Amb aquesta notació, es compleix que podem codificar la funció $R_A(n)$ mitjançant la funció generadora següent:

$$\sum_{n\geq 0} R_A(n)z^n = \frac{f_A(z)^2 + f_A(z^2)}{2}.$$

En efecte: $f_A(z)^2$ té com a coeficient $n$-èssim el nombre de solucions de l'equació $x+y=n$ (sense restricció per $x, y$ llevat que tots dos són elements de $A$), mentre que $f_A(z^2)$ codifica en el seu coeficient $n$-èssim el nombre de solucions de l'equació $2x = n$, per $x \in A$. Per tant, el coeficient $n$-èssim de $\frac{f_A(z)^2+f_A(z^2)}{2}$ codifica el nombre de solucions de l'equació $x+y=n$, amb $x, y \in A$, on, a més, $x \leq y$.

Si ara la funció $R_A(n)$ és constant d'un lloc en endavant (diguem a partir de $n_0$), aleshores

$$\sum_{n\geq 0} R_A(n)z^n = P(x) + \sum_{n\geq n_0} cz^n,$$

on $c$ és la corresponent constant i $P(x)$ és un polinomi amb coeficients enters positius de grau estrictament més petit que $n_0$. Aquesta expressió es pot escriure de la manera següent:

$$P(x) + \sum_{n\geq n_0} cz^n = P(z) + \frac{z^{n_0}}{1-z}$$
$$= \frac{(1-z)P(z) + z^{n_0}}{1-z} = \frac{Q(z)}{1-z},$$

on $Q(z)$ és un polinomi de grau com a molt $n_0$ i que no és divisible entre $1-z$. Per tant, el problema per resoldre és equivalent a demostrar que no existeix $f_A(z)$ pel qual es compleixi una equació del tipus

$$\frac{f_A(z)^2 + f_A(z^2)}{2} = \frac{Q(z)}{1-z},$$

en la qual $Q(z)$ és un polinomi no divisible per $1-z$.

Vegem ara que aquesta igualtat no és possible. Sigui $M$ una fita superior de la funció $\left|\frac{Q(z)}{1-z}\right|$ per $z \in [-1, -1/2]$. Aleshores, existeix $\varepsilon > 0$ pel qual $f_A((-1+\varepsilon)^2) > 2M$, ja que $\lim_{\varepsilon\to 0} f_A((-1+\varepsilon)^2) = +\infty$ (recordeu que $A$ és un conjunt infinit). A més, per a aquest valor de $\varepsilon$, $f_A((-1+\varepsilon))^2 \geq 0$, perquè és un quadrat. Per tant, tenim que

$$\left|\frac{Q(-1+\varepsilon)}{2+\varepsilon}\right| = \left|\frac{f_A(-1+\varepsilon)^2 + f_A((-1+\varepsilon)^2)}{2}\right|$$
$$= \frac{1}{2}(|f_A(-1+\varepsilon)^2| + |f_A((-1+\varepsilon)^2)|) > M,$$

que es contradiu amb la tria de $M$.